



ORIGINAL

Media armónica. Un acertijo con trampa.

Molina Arias M

*Hospital Infantil Universitario La Paz. Madrid. España.***Resumen**

La media armónica es el recíproco de la media aritmética. Se calcula como el número total de observaciones dividido por la suma de los recíprocos. Se utiliza en situaciones en las que hay que promediar trayectos de igual longitud con diferentes tiempos, así como para promediar múltiplos o cocientes.

Introducción

$$H = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_N}}$$

Media armónica

La media armónica es el recíproco de la media aritmética. Se calcula como el número total de observaciones dividido por la suma de los recíprocos. Se utiliza en situaciones en las que hay que promediar trayectos de igual longitud con diferentes tiempos, así como para promediar múltiplos o cocientes.

Mi primo es un tío muy deportista. Le encanta correr. Además, corre con regularidad y hace siempre el mismo circuito. Nunca he llegado a comprender cómo no se aburre.

Hoy voy a utilizar este sano vicio de mi primo para plantearos un acertijo un poco tramposo, a ver cuántos de vosotros podéis darme la respuesta correcta.

Un acertijo con trampa

Como ya os dicho, el circuito que hace mi primo todas las mañanas es siempre el mismo. Hay un parque al lado de su casa que tiene un perímetro de 2 kilómetros y le da 5 vueltas. Para colmo, todos los días corre los 10 kilómetros más o menos al mismo ritmo.

La primera vuelta va calentando, así que corre a 12 kilómetros por hora (km/h). En la segunda vuelta, ya caliente y lleno de endorfinas, acelera hasta la friolera de 17 km/h. En la tercera se le empiezan a notar los años, con lo que el ritmo baja un poco, a 14 km/h. En la cuarta vuelta ya va con la lengua fuera: 8 km/h. Por fin, en la última vuelta se relaja un poco y va casi de paseo, a 5 km/h.

Como veis, la velocidad va variando según las vueltas. Mi pregunta tramposa es: ¿a qué velocidad media corre mi primo en su maratón mañanera?

Alguno de vosotros pensará que la respuesta es bastante fácil. Si hace 5 vueltas a 12, 17, 14, 8 y 5 km/h, la velocidad media será de $(12+17+14+8+5)/5 = 11,2$ km/h.

Pues ya le gustaría a mi primo que esta respuesta fuese correcta.

Pensemos un poco. Ya sabemos que la velocidad es la relación entre la distancia que recorre un cuerpo, por ejemplo, mi primo, y el tiempo que tarda en recorrerlo. En nuestro acertijo, la distancia es fácil de calcular: 5 vueltas, a 2 kilómetros por vuelta, da un total de 10 km. Pero ¿cuánto tiempo tarda?

Recordemos que cada vuelta tiene 2 km. Si durante la primera va a 12 km/h, una sencilla regla de tres nos permitirá calcular que termina la vuelta en 0,16 horas, unos 10 minutos. La segunda vuelta, a 17 km/h, la hará en 6,6 minutos. Y así, la tercera, cuarta y quinta, tardará 8,5, 15 y 24 minutos respectivamente. O sea, que en total tarda en dar las 5 vueltas $10+6,6+8,5+15+24 = 64,1$ minutos o, lo que es lo mismo, 1,07 horas.

Pues ya tenemos la respuesta: si ha hecho 10 km en 1,07 horas, su velocidad media ha sido de $10/1,07 = 9,4$ km/h.

Algo ha fallado. Nuestra primera estimación es superior a la velocidad media real.

Media armónica

Ahora os pregunto, ¿cómo hemos podido equivocarnos en un cálculo tan sencillo?

La razón es que hemos planteado el problema como el cálculo de una media aritmética de las velocidades de cada tramo, pero esto solo sería correcto si todas las vueltas se diesen en el mismo tiempo. Cuando los diferentes tramos tienen la misma distancia, pero se recorren en tiempos diferentes, para obtener la velocidad media total no nos servirá la media aritmética, sino una de sus parientes, la media armónica.

En resumen, para resolver este acertijo tendremos que calcular la media armónica de las velocidades medias parciales.

Pero ¿qué es la media armónica? La media armónica no es otra cosa que la recíproca de la media aritmética. Se calcula como el número total de observaciones dividido por la suma de los recíprocos.

En nuestro acertijo, procederíamos del siguiente modo para calcularla:

$$\text{media armónica} = 5 / (1/12+1/17+1/14+1/8+1/5) = 9,3 \text{ km/h}$$

Como puede verse, el resultado coincide con el que hicimos de forma manual, con una pequeña diferencia debida a los redondeos.

Usos de la media armónica

La media armónica sirve para situaciones como las del ejemplo que hemos visto, en las que hay que promediar trayectos de igual longitud con diferentes tiempos, por lo que es muy utilizada en el campo de la electrónica y también para promediar múltiplos o cocientes, como en las operaciones bursátiles.

No debe confundirse con otro de los parientes de la media aritmética, la media geométrica. La media geométrica, que se calcula como la raíz n del producto de n términos, es más útil para calcular tasas de crecimiento y promedios en series temporales, sobre todo cuando hay escalas logarítmicas.

Hay una relación entre las tres medias, de forma que la media armónica es siempre inferior a la media geométrica que, a su vez, es inferior a la media aritmética.

Dos peculiaridades de la media armónica

Hay dos aspectos que podemos comentar en relación con las peculiaridades de la media armónica.

El primero, todos los elementos que queremos promediar deben ser necesariamente no nulos. Esto es así porque no podemos dividir por cero, así que no tiene sentido calcularla si uno de los elementos vale cero. El valor de la media armónica quedaría indeterminado.

El segundo, es una medida bastante robusta frente a la presencia de valores extremos altos. Al calcular el inverso, el valor de los extremos influye menos en el total de la suma de los recíprocos. Pensemos, por ejemplo, que el inverso de 500 es 0,002, mientras que el de 5 es 0,2. Así, cuanto más grande sea una observación, menos influirá en el resultado.

Sin embargo, lo contrario ocurre con los valores muy bajos. Si lo pensamos, cuanto más se aproxime a cero un número, mayor será el valor de su inverso, por lo que tendrán mucho más peso en el valor de la media armónica (y también en la geométrica).

Una confesión

Antes de acabar, tengo que confesaros que la historia que os he contado sobre mi primo es totalmente falsa. Mi primo no corre ni para coger el autobús.

La fábula que os he contado está, sin embargo, inspirada en una anécdota que se cuenta sobre un problema que le puso Max Wertheimer, uno de los creadores

de la Gestalt, a un amigo suyo, un tal Albert Einstein. Este acertijo consistía en averiguar a qué velocidad tenía que bajar un coche una montaña, sabiendo la distancia de subida y bajada y la velocidad de subida, para conseguir un promedio total de velocidad determinado.

Nos vamos...

Y ahora sí lo dejamos por hoy.

Hemos hablado hoy de la media armónica y de cómo una de sus características es la de la robustez ante la presencia de valores elevados.

Pero la media armónica no es la única variante robusta de la media aritmética. Existen otras como la media recortada, la winsorizada, la ponderada, etc. Pero esa es otra historia...

Bibliografía

– Essentials of the R language. En: Crawley MJ ed. The R book. John Wiley and Sons Ltd. West Sussex, Inglaterra, 2017; 9-95. ([PDF](#))

– Martínez-González MA, Gea A, Sayón Orea C. Procedimientos descriptivos. En: Martínez-Sánchez MA, Sánchez-Villegas A, Toledo EA, Faulin J, eds. Bioestadística amigable, 3ª ed. Elsevier España, SL. Madrid, 2014; 13-64. ([HTML](#))

Correspondencia al autor

Manuel Molina Arias.
mma1961@gmail.com
 Servicio de Gastroenterología.
 Hospital Infantil Universitario La Paz.
 Madrid. España.

Aceptado para el blog en enero de 2022